Zagadnienia proponowane na XXXII Ogólnopolski Sejmik Matematyków

1. Pierwsze modele populacyjne

Pojęcie i istota modelu matematycznego. Najstarsze modele ekologiczne i populacyjne. Ciąg Fibonacciego i jego zastosowania. Przegląd metod matematycznych stosowanych w różnych modelach: np. w procesie urodzin i śmierci, modelu drapieżnik-ofiara, itp.

[1] Urszula Foryś, *Matematyka w biologii*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 2005.

[2] Delta - miesięcznik matematyczno-fizyczno-astronomiczny szczególnie polecamy artykuły:
– W. Kunicki-Goldfinger, *O roli intuicji i teorii w rozwoju biologii*, Delta 8 (80), 1980
– L. Kuźnicki, *Zasada nieciągłości w ewolucji*, Delta 8 (116), 1983
– W. Kunicki-Goldfinger, *Redukcjonizm w biologii*, Delta 9 (117)1983
– E. Skrzypczak, *Rysie, króliki, wojownicze koty, czyli o modelowaniu matematycznym procesów niefizycznych*, Delta 11 (23), 1975.

[3] Stanisław Kowal, *Przez rozrywkę do wiedzy. Rozmaitości matematyczne*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1986.

2. Ciekawe własności elipsy, hiperboli i paraboli

definicje, równania, osie symetrii, biegunowa, kierownica, mimośród, twierdzenia o stycznych, okrąg opisany na elipsie, trójkąt opisany na elipsie, superelipsa, asymptoty hiperboli, własność odbiciowa elipsy, własność odbiciowa paraboli.

[1] Franciszek Leja, *Geometria analityczna*

3. Relacje na zbiorach

Powiedzmy, że osoba A jest w relacji z osobą B, gdy osoba A darzy sympatia osobę B. Psychologowie z pewnością potwierdzą, że relacja ta niejest ani zwrotna, ani symetryczna, ani przechodnia. Nie jest więc relacją równoważności, ani częściowo porządkującą. Relacje równoważności i relacje porządkujące odgrywają w matematyce istotną rolę, dzieląc zbiory na parami rozłączne klasy abstrakcji lub porządkując je w określony sposób, ułatwiając na przykład zliczanie elementów danego zbioru.

Spróbuj opisać świat relacji matematycznych. Ustaw elementy zbioru $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ w porządku leksykograficznym, uporządkuj ciągi skończone zero-jedynkowe, skonstruuj za pomocą odpowiednich relacji zbiory liczb całkowitych, wymiernych, zbuduj topologicznego „jeża” z ilością kolców równą mocy zbioru iczb naturalnych. Wreszcie zdefiniuj własną relację na wybranym zbiorze i zbadaj jej własności.

[1] Bogdan Miś, *Tajemnicza liczba e i inne sekrety matematyki*, WNT, Warszawa 1989

[2] Fritz Reinhardt, Heinrich Soeder, *Atlas matematyki*, Prószyński i S-ka, 2003

[3] Helena Rasiowa, *Wstęp do matematyki współczesnej*, Warszawa, 2003

[4] Andrzej Grzegorczyk, *Zarys arytmetyki teoretycznej*, Wyd. Naukowe PWN, 2000

[5] Ryszard Engelking, *Topologia ogólna*, Wyd. Naukowe PWN, 2007

4. Problem $3n + 1$

W matematyce jest znanych kilka trudnych i nierozstrzygniętych do dzisiaj problemów, które można bardzo łatwo sformułować, bez używania pojęć wykraczających poza program szkolny. Jednym z nich jest tzw. problem $3n + 1$, zwany również hipotezą Collatza, problemem syrakuzańskim (spotyka się jeszcze inne nazwy). Wybierzmy dowolną liczbę naturalną n i postępujmy z nią następująco: jeśli n jest parzyste, to podzielmy je przez 2, a jeśli nie, to pomnóżmy przez 3 i dodajmy 1. Następnie powtarzamy tą procedurę z uzyskaną liczbą aż „do skutku”. Na przykład, jeśli wybierzemy $n = 3$, to otrzymamy ciąg $3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, \ldots$. Możemy zauważyć, że w przypadku każdej wybranej przez nas liczby początkowej n, ciąg zbudowany tak jak powyżej w końcu wpadnie w pętlę $4, 2, 1, 4, 2, 1, \ldots$. Hipoteza Collatza mówi, że w tę pętlę wpadniemy dla każdej początkowej liczby naturalnej n. Praca mogłaby zawierać omówienie znanych częściowych rezultatów (por. literatura). Można też spróbować odpowiedzieć na pytanie co się stanie, jeśli w konstrukcji ciągu zamienimy pewne stałe, np. zamiast dzielić przez 2 oraz mnożyć przez 3 i dodawać 1 będziemy dzielić przez 3 liczby podzielne przez 3, a niepodzielne mnożyć przez 2 i dodawać 4. Pisząc pracę można wspomóc się programem komputerowym. Autor powinien jednak pamiętać, że pisze pracę z matematyki, a nie z informatyki.

[1] D. Applegate, J.C. Lagarias, *The $3x + 1$ semigroup*, Journal of Number Theory, Volume 117, Issue 1, March 2006, 146—159.

[2] http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022314X05001459

[3] M.E. Lines, *Liczby wokół nas*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1995.

[4] J. Simons, B. de Weger *Theoretical and computational bounds for m-cycles of the $3n+1$ problem*, Acta Arithmerica 117.1 (2005), 51–70.

[5] http://deweger.xs4all.nl/papers/[35]SidW-3n+1-ActaArith[2005].pdf

[6] źródła internetowe, np.: http://en.wikipedia.org/wiki/Collatz-conjecture#Statement-of-the-problem

5. Matematyka wedyjska

Zbiór 16 sutr (zasad), które znacznie ułatwiają nam wykonywanie różnych operacji matematycznych w pamięci – tak w jednym zdaniu można opisać czym jest matematyka wedyjska. Zachęcam do zapoznania się z tymi regułami, które do dnia dzisiejszego wykorzystywane są w szkołach indyjskich.

Spis 16 sutr, który czeka na ich rozszyfrowanie i opracowanie.

[1] Internet

[2] *Vedic Mathematics*, Jagadguru, 1965

[3] *Vedic Mathematics for all ages* Vandana Singhal, Delhi, 2008

[4] *The power of Vedic Maths* Atul Gupta, Mumbai, 2008

6. George Boole – 200 rocznica urodzin

W dwusetną rocznicę urodzin George'a Boole'a warto przypomnieć sobie, czym zajmował się ten genialny matematyk. Warto opowiedzieć o algebrach Boole'a – czym są? Gdzie je stosujemy i w jaki sposób? Młody podróżniku i poszukiwaczu nie będę opowiadał Ci zbyt wiele o tej Postaci i jego dziele, gdyż nie chcę odbierać Ci przyjemności z poznawania czegoś, co w dzisiejszym świecie funkcjonuje w praktyce, a co narodziło się w umyślę Georga wiele lat temu.

[1] Internet

[2] *George Boole: Selected Manuscripts on Logic and its Philosophy*, Ivor Grattan-Guinness (Editor), Gerard Bornet (Editor), George Boole, 1997

[3] *An Investigation of the Laws of Thought*, George Boole, 2010

[4] *Algebry Boole'a i ich zastosowania*, Andrzej Włodzimierz Mostowski, 1964

[5] *Zastosowanie zagadnień algebry Boole'a w strukturalizacji procesów decyzyjnych*, Marian A. Partyka, 1997

[6] *Wstęp do teorii algebr Boole'a*, T. Traczyk, 1970

7. Matematyka kontra fizyka

Blaise Pascal to matematyk, fizyk, filozof. Zapoznaj się z jego osiągnięciami w dziedzinie matematyki, fizyki i informatyki. Sprawdź co to jest paskalina, trójkąt Pascala, hydrostatyka? Szukając tych informacji znajdziesz wiele innych osiągnięć Pascla. Opisz najciekawsze z nich i odpowiedz czy dla Ciebie, to matematyk, fizyk czy może informatyk?

8. AbstrAkcjA

Abstrakcja jest pojęciem związanym z wieloma dziedzinami. Najczęściej łączymy je ze sztuką lub filozofią, ale pojęcie to występuje też w programowaniu i matematyce. W tej ostatniej jest ściśle połączone z pojęciem relacji równoważności, czyli takiej, która jest zwrotna, symetryczna i przechodnia. Relacja o podanych własnościach dokonuje podziału zbioru, w którym jest określona, na klasy abstrakcji (równoważności). W pracy należy podać zastosowania relacji równoważności, ponadto można rozwiązać klika zadań z [1] lub [2].

[1] H. Rasiowa, *Wstęp do matematyki współczesnej*, Warszawa, PWN, 1990.

[2] W. Marek, J. Onyszkiewicz, *Elementy logiki i teorii mnogości w zadaniach*, Warszawa, PWN, 2000.

9. Z matematyką na wakacje

Zwiedzając miasta, czy przemierzając szlaki zastanawiamy się jaką wybrać trasę aby zobaczyć dużo i nie wracać do tych samych miejsc, a może lepiej będzie przejść każdą uliczką, alejką czy ścieżką tylko raz. Wybierz dowolne miasto lub Park Narodowy i zaproponuj plan swojej wycieczki. Jeżeli jesteś miłośnikiem turystyki rowerowej zaproponuj trasy rowerowe. Pomocy w rozwiązaniu tego zadania poszukaj w teorii grafów zapoznaj się z grafami Eulera lub grafami Hamiltona.

[1] R.J. Wilson, *Wprowadzenie do teorii grafów*, PWN, Warszawa 2000.

[2] K.S. Ross, Ch.R.B. Wright, *Matematyka dyskretna*, PWN, Warszawa 1996.

[3] Z. Palka, A. Ruciński, *Wykłady z kombinatoryki*, WNT, Warszawa 2004.

[4] V. Bryant, *Aspekty kombinatoryki*, WNT, Warszawa 1997.

[5] W. Lipski, *Kombinatoryka dla programistów*, WNT, Warszawa 1989

10. Łańcuchy Markowa

Rzucamy 10 razy monetą - każdy kolejny wynik (orzeł lub reszka) jest niezależny od poprzedniego. Z talii kart losujemy kolejno 10 kart (bez zwracania) - wynik dziesiątego losowania zależy od wszystkich poprzednich.
Postawmy pionka na losowo wybranym polu szachowym. Następnie, w każdym kroku, przesuwajmy go na losowo wybrane pole sąsiednie. To, na którym polu znajdzie się po stu krokach, zależy od wszystkich poprzednich kroków. Z auważmy jednak, że jeśli wiemy, na którym polu stał po 99 krokach, to wiedza o krokach poprzednich nie da nam żadnej nowej informacji. Mamy zatem do czynienia z łańcuchem Markowa. Oprócz zapoznania się z własnościami łańcuchów Markowa, warto pomyśleć nad własnymi przykładami.

[1] P. Billingsley, *Prawdopodobieństwo i miara*, PWN, Warszawa, 2009

[2] M. Iosifescu, *Skończone procesy Markowa i ich zastosowania*, PWN, Warszawa, 1988

[3] J. Jakubowski, R. Sztencel, *Wstęp do teorii prawdopodobieństwa*, Script, Warszawa 2001

[4] M. Podgórska, P. Śliwka, M. Topolewski, M. Wrzosek, *Łańcuchy Markowa w teorii i zastosowaniach*, SGH, Warszawa, 2002

11. Zbiory gęste

Każdy wie, że liczb rzeczywistych jest więcej niż wymiernych. Gołym okiem też widać, że liczb wymiernych jest więcej niż naturalnych. Jednak nie do końca - możemy skonstruować dla nich wzajemnie jednoznaczną funkcję. Ale domykając zbiór liczb wymiernych otrzymamy zbiór liczb rzeczywistych. Zatem, w odróżnieniu od zbioru liczb naturalnych, jest on gęsty w $\mathbb{R}$, czyli całkiem duży. Zbiór liczb naturalnych jest nigdziegęsty, czyli raczej mały. Innym przykładem zbioru nigdziegęstego (czyli małego) jest zbiór Cantora (który jest równoliczny ze zbiorem liczb rzeczywistych, czyli całkiem duży)....
Nie tylko dla liczb możemy mówić o zbiorach gęstych. Przykładowo zbiór wielomianów jest gęsty w zbiorze funkcji ciągłych.

[1] S. Łojasiewicz, *Wstęp do teorii funkcji rzeczywistych*, PWN, Warszawa, 1976

[2] H. Musielak, J. Musielak, *Analiza matematyczna*, Wydawnictwo Naukowe UAM, 2004

[3] J. C. Oxtoby, *Measure and Category, Springer-Verlag*, New York - Heidelberg - Berlin 1980

[4] H. Rademacher, *Higher mathematics from an elementary point of view*, Birkhäuser, Stuttgart, 1982

12. Matematyka kostki Rubika

Podczas Sejmikowych finałów, w pokoju z napojami i ciastkami znaleźć można także pokaźną liczbę gier i łamigłówek. Wśród tych znajdziemy zaś kilka różnych odmian kostki Rubika. Kostki te są jednakże nie tylko interesującą rozrywką lecz mogą stanowić znakomity punkt wyjścia do matematycznych rozważań i stanowić ilustrację wielu matematycznych pojęć, głównie z zakresu algebry i kombinatoryki. Kostka Rubika nie tylko bawi — rozwija wyobraźnię przestrzenną, pozwala na uzmysłowienie sobie prawdziwie abstrakcyjnych pojęć i metod matematycznych, zwłaszcza teorii grup.

Zachęcamy zatem uczestników do zgłębienia matematycznej strony kostek Rubika. Jak mnożymy permutacje? Co to znaczy, że grupa działa na zbiorze? Czy w kostce Rubika można zobaczyć graf? Podkreślmy: nie chodzi nam o algorytmy układania kostek Rubika, ale o pojęcia matematyczne, które można na nich zilustrować.

[1] Wolfgang Hintze, *Magiczna kostka*, PWN 1987.

13. Problem optymalizacji profilu

W badaniach ultrasonograficznych pewnych własności substancji istotna jest prędkość z jaką fal dźwiękowe przemieszczają się w tym materiale. Okazuje się jednak, że prędkość dźwięku dla fal o różnych częstotliwościach nie jest jednakowa i te różnice są nie zaniedbywalne. Ponieważ czasem badana substancja podlega podczas badaniu pewnym zmianom (temperatura otoczenia, ciśnienie atmosferyczne, natężenie pola elektromagnetycznego w laboratorium, ...), analizowane częstotliwości powinny być wysyłane jednocześnie w postaci **superpozycji** fal «monosonarycznych»:

$$F_{f,A,\varphi}(t) = A \cdot \sin(2\pi f \cdot t + \varphi) \;, \quad t \in \langle 0 \,,\, T_{\max} \rangle$$

czyli w postaci:

$$F_{f_1,A_1,\varphi_1\,;\,f_2,A_2,\varphi_2\,;\,\dots\,;\,f_H,A_H,\varphi_H}(t) = \sum_{h=1\dots H} F_{f_h,A_h,\varphi_h}(t) = \sum_{h=1\dots H} A_h \cdot \sin(2\pi f_h \cdot t + \varphi_h) \qquad (1)$$

$$, \quad t \in \langle 0 \,,\, T_{\max} \rangle$$

Problem polega na tym, że z przyczyn technicznych:

(a) wartość początkowa funkcji (1) musi być zerem, czyli

$$F_{f_1,A_1,\varphi_1\,;\,f_2,A_2,\varphi_2\,;\,\ldots\,;\,f_H,A_H,\varphi_H}\,(0) = \sum_{h=1\ldots H} A_h \cdot \sin\left(\varphi_h\right) = 0$$

(b) Rozstęp między lokalnymi maksimami wartości bezwzględnej funkcji (1), czyli wartość:

$$\mathcal{R}_{f_1,A_1,\varphi_1\,;\,f_2,A_2,\varphi_2\,;\,\ldots\,;\,f_H,A_H,\varphi_H} = \min\left\{|\mu_1|,\ldots,|\mu_S|\right\}/\max\left\{|\mu_1|,\ldots,|\mu_S|\right\}$$

nie może być zbyt duży, gdzie $\mu_1,\ldots,\mu_S$ są wszystkimi ekstremami lokalnymi funkcji (1) w przedziale $\langle\, 0\,,\ T_{\max}\rangle$.

Celem pracy może być znalezienie algorytmu (choćby przybliżonego) o sensownej złożoności obliczeniowej, który:

(a) dla danej wartości progu $p \in (\,0\,,\ 1\,\rangle$, częstotliwości $f_1,\ldots,f_H \in (\,0\,,\ 1/2\,\rangle$ oraz amplitud $A_1,\ldots,A_H \in (\,0\,,\ 1\rangle$ wyznaczy wartości faz $\varphi_1,\ldots,\varphi_H \in \langle\,0\,,\ 2\pi\,)$, dla których

$$\mathcal{R}_{f_1,A_1,\varphi_1\,;\,f_2,A_2,\varphi_2\,;\,\ldots\,;\,f_H,A_H,\varphi_H} \leqslant p$$

lub który

(b) dla danych wartości częstotliwości $f_1,\ldots,f_H \in (\,0\,,\ 1/2\,\rangle$ oraz amplitud $A_1,\ldots,A_H \in (\,0\,,\ 1\rangle$ wyznaczy wartości faz $\varphi_1,\ldots,\varphi_H \in \langle\,0\,,\ 2\pi\,)$, dla których

$$\mathcal{M}_{f_1,A_1;\ldots;f_H,A_H} = \max_s |\mu_s|$$

jest najmniejsze spośród wszystkich możliwych (przy tych samych częstotliwościach i amplitudach)

Na początek, dla uproszczenia można ograniczyć się do wartości faz równych 0 lub π.

14. Problem »ostatniego bitu«

W pewnych zastosowaniach analizowane są wartości funkcji postaci:

$$\mathcal{Y}\,(t) = A \cdot \sin\left(2\pi f \cdot t + \varphi\right)\ , \quad t \in \langle 0\,,\ T_{\max}\rangle \tag{2}$$

gdzie $A \in (\,0\,,\ 1\rangle$, $f \in (\,0\,,\ 1/2\rangle$ oraz $\varphi \in \langle\,0\,,\ 2\pi\,)$. W procesie pomiaru wartości (2) podlegają kilku rodzajom zniekształceń:

(a) **Próbkowanie:**
Wartości (2) podawane są dla wybranych punktów czasowych:

$$t_n = n/F_{\text{smp}}\ , \quad n = 0\,,\ \ldots\ ,\ N-1$$

i zamiast wszyskich wartości funkcji $\mathcal{Y}$ mamy do dyspozycji wartości:

$$Y_n = A \cdot \sin\left(2\pi n \cdot f/F_{\text{smp}} + \varphi\right)\ , \quad n = 0,\ldots,N-1 \tag{3}$$

(b) **Digitalizacja:**
Wartości ciągu (3) zapisywane są z ograniczoną dokładnością wynikającą z precyzji użytych przetworników analogowy-cyfrowych i sprzętu komputerowego. Wówczas zamiast wartości (3) dysponujemy wartościami:

$$\widetilde{Y}_n = 2^{-\delta} \cdot \left[Y_n \cdot 2^\delta\right]\ , \quad n = 0,\ldots,N-1 \tag{4}$$

gdzie $[x]$ oznacza zaokrąglenie liczby x do najbliższej liczby całkowitej ($[x] = \lfloor x\rfloor + \lfloor 2\cdot(x - \lfloor x\rfloor)\rfloor$), a δ jest rozdzielczością bitową (najczęściej 16, 32 ew. 64).

(c) **Utrata ostatniego bitu:**
Z technicznych powodów, których wyjaśnienie mogłoby być tematem całkiem sporej pracy na zgoła inny konkurs, ostatnia cyfra wartości (4) ulega zniekształceniu. W związku z powyższym zamiast nich dysponujemy wartościamy $\left\langle \widehat{Y}_n \right\rangle_n$ o których wiadomo, że (pracujemy w układzie dwójkowym):

$$\left|\widetilde{Y}_n - \widehat{Y}_n\right| < 2^{-\delta}\ , \quad n = 0,\ldots,N-1$$

(d) **«Obce» częstotliwości**
Ponieważ zazwyczaj nie sposób odizolować układu pomiarowego od wpływu innych okresowych czynników zewnętrznych (drgania sejsmiczne, puls badanego, kołysanie się pojazdu, którym się porusza miernik). Zazwyczaj objawia się to w postaci modulacji amplitudy. Wówczas zamiast wyżej wymienionych wartości, te które otrzymujemy są postaci:

$$\check{Y}_n = \left(1 + \mu_1 \cdot \sin\left(2\pi g_1 \cdot n/F_{\text{smp}} + \psi_1\right) + \mu_1 \cdot \sin\left(2\pi g_1 \cdot n/F_{\text{smp}} + \psi_1\right) + \ldots\right) \cdot \widehat{Y}_n \quad , \quad n = 0,\ldots,N-1 \tag{5}$$

Zadaniem analityka sygnału w tej sytuacji jest wyznaczenie przybliżonych wartości nieznanych A i φ. Zazwyczaj w takiej sytuacji używa się tzw. Metody Najmniejszych Kwadratów (**MNK**), za sprawą której sprowadza się to do wymnożenia kolumnowego wektora złożonego z uzyskanych wartości Y przez odpowiednią macierz Λ (szczegóły można znaleźć w internecie).

Przedmiotem pracy mogłaby być analiza dokładności uzyskanych przybliżeń w zależności od rodzaju wymienionych zniekształceń i ich parametrów. Rozważania te można także rozszerzyć na przypadek superpozycji kilku częstoliwości. Tzn. gdy $\mathcal{Y}$ jest postaci:

$$\mathcal{Y}(t) = \sum_{h=1\ldots H} A_h \cdot \sin\left(2\pi f_h \cdot t + \varphi_h\right) \ , \quad t \in \langle 0\,,\ T_{\max} \rangle \ .$$

Można zastanowić, się czy nie ma lepszego sposobu odzyskiwania utraconych parametrów $A_1, \ldots, A_h$ i $\varphi_1, \ldots, \varphi_H$ niż **MNK** ?